重力波之研究

Research on Gravitational Waves

計畫編號：NSC 89-2112-M-032-021

執行期限：89 年 8 月 1 日至 90 年 7 月 31 日

主持人：曹慶堂　　淡江大學物理系

一、中文摘要

在一維位能為 Duffing 的 pseudoclassical 力學系統中，我們檢驗混沌的產生。利用 Melinikov 方法，我們將證明混沌運動會在帶有 3 個或以上 Grassmann 變量的系統出現。

關鍵詞：pseudoclassical 力學、混沌、Melnikov 方法

Abstract

The onset of chaos in one-dimensional pseudoclassical mechanical systems with a bosonic Duffing potential is examined. Using the Melnikov method, we show that chaotic motions occur in systems with three or more Grassmann variables.

Keywords: Pseudoclassical Mechanics、chaos、Melnikov techniques

二、緣由與目的

由於重力場是非線性的，混沌行為在愛恩斯坦的廣義相對論中[1]應該是一個廣泛的現象，在這方面的研究大致可分為兩大類。第一類是關於宇宙演化的模型，像著名的 Bianchi IX(mixmaster)模型[2]，而 mixmaster 模型在接近初始奇異點的演化是否為渾沌一直存有爭議，這問題在於能否以 covariant 的方法來確認混沌行為。近來這個爭議已用與座標無關的碎形方法來解決[3、4]。

另一類研究主要是關於測試粒子在背景時空中的運動，譬如，N 個 extreme 的黑洞[5、6]或一個被擾動的 Schwarzschild 黑洞[7]。在 1997 年，Suzuki 和 Maeda[8]在這系列上增加一個有趣的例子。他們證明自旋粒子在 Schwarzchild 黑洞的運動為混沌。這個例子對於黑洞吸積的現象是相當重要，因為大部分的天體都有自旋。此外，如果雙黑洞融合中，一個或兩個黑洞有快速自旋的運動，那麼混沌行為將會影響他們所產生的重力波[9、10]。因為雙黑洞的重力波在未來幾年很可能被量測到[11]，所以我們迫切需要對此現象有更加詳細的了解。

自旋粒子的行為從另一觀點來看已被考慮在[12、13]論文上。作者們描述自旋粒子如同物體在超對稱空間運動，此空間被稱為 spinning space，是 Grassmann 矢量加上一般的時空座標。因此，混沌和超對稱以及 pseudoclassical mechanics [14]的關係，極有往後深入探討的價值。

在論文[7]中，一個相當有用的分析方法稱為 Melnikov 技術，用來量測測試粒子在一個被重力波所干擾的 Sxhwarzschild 黑洞時空的混沌運動。對於粒子在未被干擾的 Schwarzschild 時空，將會有 homoclinic 軌道，其路徑於不穩定的定點會合，在微擾的系統中，穩定和不穩定的路徑會分歧。當 Melnikov 函數有個別的零值出現時，意指這兩個軌道有複雜的纏繞著，並顯示混沌的產生。

在這裏我們會討論混沌和 pseudoclassical mechanics 的關係。為簡單起見，我們處理一維但可以有任何數目 Grassmann 變量的系統。對於 bosonic 部分，我們採用有簡單 homoclinic 軌道的 Duffing 位能。然後，加入 Grassmann 變量，把它當作與時間有關的微擾項，來探討是否有混沌的產生。

三、結果和討論

在一維的 Duffing 系統中，哈密頓可寫作

$$H=\frac{p^2}{2}+V(x) \quad (1)$$

$$V(x)=-2x^2+x^4 \quad (2)$$

當能量 $E=0$，homoclinic 軌道(separatrix)的方程式為

$$x_s=\sqrt{2}\sec h(\sqrt{2}t) \quad (3)$$

$$p_s=-4\sec h(\sqrt{2}t)\tanh(\sqrt{2}t) \quad (4)$$

考慮 Grassmann 變量在 pseudoclassical 模型下，我們沿用在論文[14]的符號。首先，在 G_1 模型中，僅有一個 Grassmann 變量 ξ，其運動方程式

$$\frac{d\xi}{dt}=0\Rightarrow\xi=\text{constant} \quad (5)$$

這 Grassmann 變量是個常數。接著在 G_2 模型，分別有兩個 Grassmann 變量 ξ_1 和 ξ_2，哈密頓則為

$$H=\frac{p^2}{2}+V(x)-iW(x)\xi_1\xi_2 \quad (6)$$

$$\frac{d(\xi_1\xi_2)}{dt}=0\Rightarrow\xi_1\xi_2=\text{constant} \quad (7)$$

在哈密頓所增加的 fermionic 部分僅改變 bosonic 位能並無混沌行為。

在有 ξ_1，ξ_2 和 ξ_3 等三個 Grassmann 變量的 G_3 模型，情況比較複雜，哈密頓的形式為[14]

$$H=\frac{p^2}{2}+V(x)-\vec{W}(x)\cdot\vec{S} \quad (8)$$

其中 $\vec{S}$ '自旋' 定義為

$$S_i=-\frac{i}{2}\varepsilon_{ijk}\xi_j\xi_k \quad (9)$$

$\vec{W}(x)$ 為位能。運動方程式如下

$$\frac{dx}{dt}=p \quad (10)$$

$$\frac{dp}{dt}=-V'(x)+\vec{W}'(x)\cdot\vec{S} \quad (11)$$

$$\frac{d\vec{S}}{dt}=-\vec{W}(x)\times\vec{S}$$

其中 ˊ 代表 d/dx。在這系統中，要量測混沌運動的產生，我們將 fermionic 部分，就是自旋 $\vec{S}$ 視作一個微擾。假設

$$x,p\sim O(1) \qquad S_i\sim(\varepsilon) \quad (13)$$

ε 是微小參數，fermionic 項在方程式(11)中可以當作與時間有關的微擾，這便是觸發混沌的機制。

為了能夠具體的討論，首先，我們對位能 $W(x)$ 取一個簡單的形式，

$$W_1=x;W_2=1;W_3=0 \quad (14)$$

我們用 $\vec{W}(x_s(t))$ 來取代自旋方程式的 $\vec{W}(x)$，可以得到 S_i 的最低項次

$$\frac{d\widetilde{S}_1}{dt}=-\widetilde{S}_3 \quad (15)$$

$$\frac{d\widetilde{S}_2}{dt}=\sqrt{2}\sec h(\sqrt{2}t)\widetilde{S}_3 \quad (16)$$

$$\frac{d\widetilde{S}_3}{dt}=\widetilde{S}_1-\sqrt{2}\sec h(\sqrt{2}t)\widetilde{S}_2 \quad (17)$$

這裡令 $S_i=\varepsilon\widetilde{S}_i$。我們可以用像 Mathematica 軟體中的數值方法來解這些微分方程式，。將初始條件加入

$$\widetilde{S}_1(0)=\widetilde{S}_2(0)=1\ ;\ \widetilde{S}_3(0)=0 \quad (18)$$

我們得到 $\widetilde{S}_1$ 和 $\widetilde{S}_2$ 是呈現振盪，而 $\widetilde{S}_2$ 除了在 t=0 附近外，大部分為常數。

我們知道外加的振盪微擾項會引發混沌行為，在這個例子中，可以藉由計算 Melnikov 函數[15、16]來深入了解。

$$M(t_0)=\int_{-\infty}^{\infty}dtp_s(t+t_0)\vec{W}'(x_s(t))\cdot\vec{S}(t)$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}dt\sec h[\sqrt{2}(t+t_0)\tanh[\sqrt{2}(t+t_0)S_1(t) \quad (19)$$

t_0 是沿著未微擾 homoclinic 軌道的參數，我們得到 $M(t_0)$ 亦為一振盪的函數，並有無數的零值。因為 Melnikov 函數是來測量已被微擾的穩定軌道和不穩定軌道之間的距離，當有無數零值產生時，表示這兩個軌道有纏繞的情形，混沌行為會出現在受微擾的 homoclinic 軌道。當這微擾項，也就是自旋或 Grassmann 變量變的越來越大時，混沌的運動將擴散到其他的相空間。

四、計劃成果自評

這裏我們使用 Melnikov 函數的方法指出 homoclinic 軌道纏繞的情形與混沌行為在帶有 3 個或以上 Grassmann 變量的一維 pseudoclassical 模型的關係。一開始我們提及自旋粒子在 Schwarzschild 黑洞時空中會有混沌現象，而自旋粒子運動可以由超對稱理論。這表示我們可以延伸到高維度的超對稱模型來探討混沌行為的產生，這些問題我們會繼續進行研究。

五、參考文獻

[1] D. Hobill, A.Burd, and A. Coley, *Deterministic Chaos in General Relativity* (Plenum, 1994).

[2] V. A. Belinsky, G.M. Lifshitz, and I. M. Khalatnikov, Sov. Phys. Usp. **13**, 745 (1971).

[3] N. J. Cornish and J. J. Levin, Phys. Rvv. Lett. **78**, 998 (1997).

[4] A. E. Motter and P. S. Letelier, Phys. Lett. **A285**, 127 (2001).

[5] G. Contopoulos, Proc. R. Soc. London **A431**, 183 (1990).

[6] G. Contopoulos, Proc. R. Soc. London **A435**, 551 (1991).

[7] L. Bombelli an E. Calzetta, Class. Quantum Grav. **9**, 2573 (1992)

[8] S. Suzuki and K.Maeda, Phys. Rev. D. **55**, 848 (1997).

[9] J. Levin, Phys. Rev. Lett. **84**, 3515 (2000).

[10] N. J. Cornish, Phys. Rev. D. **64**, 0840011 (2001).

[11] A. Abramovici, W. E. Athouse, R. W. P. Drever, Y.Gürsel, S. Kawamura, F. J. Raab, D. Shoemaker, L. Sievers, R. E. Spera, K. S. Thorne, R. E. Vogt, R. Weiss, S. E. Whitcomb, and M. E. Zucker, Science, **256** (1992) 325.

[12] R. H. Rietdijk and J. W. van Holten, Class. Quantum Grav. **7**, 247 (1990).

[13] R. H. Rietdijk and J. W. van Holten, Class. Quantum Grav. **10**, 575 (1993).

[14] R. Casalbuoni, Nuovo Cim. **33A**, 389 (1976).

[15] V. K. Melnikov, Trans. Moscow Math. Soc. **12**, 1 (1983).

[16] P. Holmes, Phys. Rept. **193**, 137 (1990).